HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren

Envariabelanalys
Uppgiftspaket 4
27 november 2024

För varje uppgift krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Korrekt löst uppgift ger 0.25 bonuspoäng.

1. Beräkna

$$\text{(a)} \int_{-2}^{1} \frac{x}{|x+1|+|x|}\,dx \qquad \text{(b)} \int_{0}^{4} \frac{dx}{x+4\sqrt{x}+4} \qquad \text{(c)} \int_{1}^{8} \frac{(1+x^{1/3})^2}{x^{2/3}}\,dx \qquad \text{(d)} \int_{1}^{4} \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}\,dx$$

2. Beräkna vid konvergens integralens värde:

$$\text{(a)} \int_{0}^{1} \frac{dx}{x+x^3} \qquad \text{(b)} \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x+x^3} \qquad \text{(c)} \int_{0}^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx \qquad \text{(d)} \int_{0}^{\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx$$

3. (a) Avgör om den generaliserade integralen är konvergent eller divergent:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x(1+e^{-x})}\,dx.$$

   (b) Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan $y = \dfrac{e^{-1/x}}{x^2}$, $x > 0$, och x-axeln.

   (c) Beräkna vid konvergens integralens värde:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}.$$

   (d) Visa att integralen $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3(e^{1/x}-1)}$ är konvergent och bestäm en övre gräns för dess värde.
   Ledning: $y = x+1$ är tangent till $y = e^x$ i punkten $(0,1)$.

4. (a) Vatteningenjören Sara ska hämta upp vatten från en 12 m djup brunn med hjälp av en hink fäst i ett rep. När hinken är full med vatten innehåller den 15 liter men den har ett litet hål som gör att den läcker 3/4 liter vatten för varje meter den hissas upp ur brunnen. Hur stort arbete krävs för att hissa upp hinken ur brunnen? Repets och hinkens massa kan försummas.

   (b) När bilingenjören Pelle är ute och kör i sin nya BMW kommer han sträckan $10 + \dfrac{v}{25}$ kilometer på en liter bensin om farten v ligger mellan 30 och 100 km/h. Pelle startar kl 8.00 och hans fart ges av

$$v(t) = \frac{80t}{1+t} \quad \text{km/h}.$$

   Hur mycket bensin förbrukar Pelles bil mellan kl 10 och kl 11?

   (c) Ett kärnkraftverk som startades 1971 producerar $p(t) = 1 + \alpha t$ kg Strontium-90 per år där t är antal år sedan starten. Hur mycket Strontium-90 som producerades från starten fanns kvar 1992? Radioaktivt sönderfall beskrivs av $n(t) = n_0 e^{-kt}$, halveringstiden för Strontium-90 är 28 år och $\alpha = \frac{1}{10}$.

5.* Koingenjören Pelle vill effektivisera sitt jordbruk och håller just nu på och experimenterar med beteshagar av olika former.

   (a) I en av hans beteshagar följer staketet kurvan $y = x/\sqrt{x^2+1}$. Bestäm en punkt (a,b) på staketet sådan att området som begränsas av staketet, x-axeln och linjen $x = a$ har dubbelt så stor area som området som begränsas av staketet, y-axeln och linjen $y = b$.

   (b) En annan av hans beteshagar har kvadratisk form. Hur stor del av dess totala area upptas av det område som består av alla punkter i hagen vars avstånd till hagens centrum är mindre än avståndet till dess sidor?

   (c) Pelle har också en helt cirkulär beteshage med radien R. Han binder sin ko Rosa med ett rep som fästs i en av staketstolparna som begränsar hagen. Hur långt rep ska Pelle använda om Rosa bara ska kunna äta upp hälften av gräset i beteshagen?

*Mathematica får vid behov användas för beräkningar i uppgift 5.