HÖGSKOLAN I HALMSTAD | **Envariabelanalys**
Akademin för informationsteknologi | Uppgiftspaket 5
Mikael Hindgren | 2 december 2024

För varje uppgift krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Korrekt löst uppgift ger 0.25 bonuspoäng.

1. (a) Lös begynnelsevärdesproblemet
$$\begin{cases} y' = 2xe^{-y}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

   (b) Visa att differentialekvationen $xy' = 2(1+y)$ är både linjär och separabel. Bestäm sedan den allmänna lösningen på två olika sätt (med standardmetoderna) och bestäm till sist den lösning $y(x)$ för vilken $y(1) = 2$.

   (c) Lös differentialekvationen $\begin{cases} y' - 2xy = 2x^3, \ x > 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$

   (d) Differentialekvationen $y' + g(x)y = 3x, \ x > 0$, har en lösning $y(x) = x^2$. Har ekvationen någon lösning som uppfyller $y(1) = 2$?

2. (a) Lös begynnelsevärdesproblemet
$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{xe^y}}{\sqrt{x}+1}, \ x > 0, \\ y(0) = -\ln 2. \end{cases}$$

   (b) Bestäm den lösning till differentialekvationen
$$xy' - 2y + \frac{x}{x^2+1} = 0, \ x > 0,$$
   för vilken $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x^2} = \pi$.

   (c) Beräkna längden av kurvan $y = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$, $2 \le x \le 4$.

   (d) Beräkna arean och volymen av den kropp som uppkommer då kurvan $y = \ln x, \ 0 < x \le 1$ roterar kring y-axeln.

3. (a) Falken Gudrun har fångat en liten mus och flyger med 15 m/s 180 m över marken. Plötsligt tappar Gudrun musen. Hur lång sträcka färdas musen i luften innan den når marken? Luftmotståndet kan försummas.

   (b) Apan Putte har bråkat med de andra aporna i aphuset på Zoo och är därför fastkedjad i en 16 m lång kedja som sitter fast i taket. Kedjan väger 0.5 kg/m, takhöjden i aphuset är 12 m och Putte väger 10 kg. Beräkna det arbete som Putte måste uträtta för att klättra ända upp till taket i kedjan.

   (c) Skriv ett program i Mathematica (eller Java) som beräknar ett approximativt värde på integralen
$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx$$
   med hjälp av Simpsons formel. Svaret ska anges med fyra korrekta decimaler.
   Anm: Ett närmevärde har k korrekta decimaler om storleken på felet $|\epsilon| \le 0.5 \cdot 10^{-k}$.

4. (a) Ett plan delar ett klot med radie r i två delar. Bestäm volymen av den mindre delen om avståndet mellan planet och klotets centrum är $r/2$.

   (b) Genom centrum på två olika stora träkulor borras olika stora hål så att de två “ringar” som återstår av kulorna har samma höjd. Vilken ring är tyngst?

   (c) Ingenjörsstudenten Olle är på puben och har blivit serverad en öl i ett cylindriskt glas med radie r och höjd h. Olle, som inte är helt nykter, pratar med sjuksköterskestudenten Kalle och utan att märka det lutar han glaset så att öl rinner ut. Vid en viss lutning är endast halva glasets bottenyta täckt med öl. Då märker Olle vad som pågår och rätar upp glaset igen. Hur mycket öl har han kvar i glaset?

5.* Tomten Kajsa är också på puben och blir där serverad en drink i ett glas som har formen av en halv sfär (radie 5 cm) på en ihålig hög fot. Den elake borringenjören Pelle har emellertid saboterat glaset genom att borra ett litet hål med radie $1/2$ mm i glasets (sfärens) botten så att Kajsas drink sakta läcker ut. Precis då Kajsa blir serverad sitt fulla glas med hål i kommer Kalle fram och bjuder upp henne på en kort dans som varar i 2 min.

(a) Hur mycket har Kajsa kvar i glaset när hon kommer tillbaka?

(b) Hur lång tid tar det innan glaset är tomt?

Ledning: Enligt Torricellis lag är vätskevolymen som rinner ut ur ett hål på botten av en behållare per tidsenhet $a\sqrt{2gy}$, där a är hålets area, g tyngdaccelerationen och y vätskeytans höjd över hålet.

*Mathematica får vid behov användas för beräkningar i uppgift 5.